ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ THU HƯƠNG

VỀ PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN CHO BÀI TOÁN TỔ HỢP VÀ HÌNH HỌC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ THU HƯƠNG

VỀ PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN CHO BÀI TOÁN TỔ HỢP VÀ HÌNH HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. Nguyễn Thanh Sơn

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

Bảng ký hiệu **ii**

Mở đầu **1**

Chương 1. Ma trận và một số kiến thức chuẩn bị **4**
1.1 Ma trận và các phép toán ma trận 4
1.2 Định thức của ma trận 7
1.3 Giá trị riêng, véctơ riêng 11
1.4 Chéo hóa ma trận 13
1.5 Chuẩn của ma trận 17
1.6 Phân tích SVD của ma trận 18

Chương 2. Phương pháp ma trận trong tổ hợp liệt kê **28**
2.1 Ma trận của đồ thị 28
2.2 Đếm đường đi: phương pháp ma trận chuyển 31
2.3 Đếm số cây bao trùm 37
2.4 Đếm chu trình Euler 42

Chương 3. Phương pháp ma trận trong hình học **47**
3.1 Quay không gian con 47
3.2 Giao của các nhân 50
3.3 Góc giữa các không gian 53
3.4 Giao của các không gian con 58

Kết luận **61**

Tài liệu tham khảo **62**

Bảng ký hiệu

$\mathbb{K}$	Trường số
$M(m \times n, \mathbb{K})$	Không gian ma trận cỡ $m \times n$ trong trường $\mathbb{K}$
A	Ma trận A
A^T	Ma trận chuyển vị của ma trận A
I_n	Ma trận đơn vị cấp n
$\mathrm{tr}(A)$	Vết của ma trận A
$\mathrm{sgn}(\sigma)$	Dấu của phép hoán vị σ
$\det(A)$	Định thức của ma trận A
$p_A(x)$	Đa thức đặc trưng của ma trận A
$\|A\|_R$	Chuẩn Frobenius của ma trận A
$\|A\|_p$	Chuẩn p của ma trận A
diag	Ma trận đường chéo
$\ker(A)$	Hạt nhân của ma trận A
$\mathrm{span}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$	Không gian véctơ sinh bởi $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
$\mathrm{im}(A)$	Ảnh của ma trận A
$A(k, :)$	Hàng thứ k của ma trận A
$A(:, k)$	Cột thứ k của ma trận A
$G(V, E)$	Đồ thị G có tập đỉnh V và tập cạnh E
$\deg(u)$	Bậc của đỉnh u
$\mathrm{indeg}(u)$	Bậc vào của đỉnh u
$\mathrm{outdeg}(u)$	Bậc ra của đỉnh u
$A(G)$	Ma trận kề của đồ thị G
$M(G)$	Ma trận liên thuộc của đồ thị G
$L(G)$	Ma trận Laplacian của đồ thị G
$L_v(G)$	Phần phụ đại số chính của $L(G)$
$\overrightarrow{L}(G)$	Ma trận Laplacian của đồ thị có hướng G
$C_G(n)$	Số đường đi đóng có độ dài n trong G
c_G	Sô cây bao trùm của đồ thị G
$c(G, v)$	Sô cây bao trùm có gốc tại v của đồ thị G
SVD	Phân tích kỳ dị của ma trận

Mở đầu

Trong toán học, lý thuyết về ma trận trong đại số tuyến tính là nội dung rất cơ bản, quan trọng và có nhiều rất nhiều ứng dụng. Ngày nay, ma trận được ứng dụng vào hàng loạt lĩnh vực khác nhau, từ giải tích tới hình học vi phân và lý thuyết đồ thị, từ cơ học vật lý tới kỹ thuật,... Vì thế nó đã trở thành trọng tâm nội dung học tập cơ sở cho việc đào tạo ở các bậc đại học và sau đại học thuộc các chuyên ngành khoa học cơ bản và công nghệ trong tất cả các trường đại học.

Về mặt lịch sử, trong tác phẩm "Nghiên cứu số học" (Disquisitiones Arithmeticae, năm 1801), để xác định một phép biến đổi tuyến tính, Gauss đã đưa ra một ký hiệu dưới dạng bảng, đó chính là ma trận. Ông cũng định nghĩa tích của hai ma trận. Điều này gợi ý cho Cauchy ([5]) đi tới định lý về tích của hai định thức. Vào giữa thế kỷ 19, Cayley và Silvester đã phát triển lý thuyết ma trận. Các khái niệm ma trận và định thức ngày càng quen thuộc hơn với các nhà toán học, chúng góp phần làm chín dần những ý niệm về không gian n chiều.

Trong lý thuyết đồ thị, một cây đồ thị là một tập hợp các mối quan hệ giữa các đỉnh và các cạnh của đồ thị. Mối quan hệ này có được biểu diễn dưới dạng danh sách các cạnh kề hoặc dưới dạng ma trận. Từ đó việc khảo sát các tính chất đặc trưng của cây đồ thị có thể thực hiện thông qua khảo sát ma trận của cây đồ thị và ngược lại. Bài toán đếm cây, đếm nhánh, đếm đường đi trên đồ thị được chuyển thành bài toán tính định thức của ma trận.

Ở một khía cạnh khác, nếu coi các cột của ma trận là các véc tơ chỉ phương của các phẳng, thì ma trận mang thông tin về phương của các phẳng đó. Những phép toán giữa các ma trận sẽ biểu hiện những biến đổi hay tương tác mang tính hình học của các phẳng mà thông qua đó, nhiều bài toán hình học được giải quyết.

Với mong muốn tìm hiểu sâu hơn về ứng dụng của ma trận trong giải các bài toán tổ hợp và bài toán hình học, chúng tôi lựa chọn đề tài *Về phương pháp ma trận cho bài toán tổ hợp và hình học* dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Thanh Sơn.

Mục đích của luận văn là sử dụng một số khái niệm và tính chất của ma trận, như định thức, giá trị riêng, phân tích giá trị kỳ dị của ma trận để giải một số bài toán như quay không gian con, giao nhau của hai không gian, và một số bài toán đếm trong tổ hợp.

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, luận văn được chia làm ba chương.

Chương 1. Ma trận và một số kiến thức chuẩn bị. Chương này tổng hợp lại định nghĩa, một số tính chất, định lý cơ bản về ma trận, định thức, các phép toán trên ma trận, vết của ma trận, phân tích SVD của ma trận.

Chương 2. Phương pháp ma trận trong tổ hợp liệt kê. Chương này trình bày ứng dụng phương pháp ma trận vào bài toán đếm của số học tổ hợp, cụ thể hơn là bài toán đếm cây, đếm chu trình, đếm số đường đi trên đồ thị. Một cây đồ thị được biểu diễn duy nhất dưới dạng một ma trận, từ đó ta có thể suy ra các đặc trưng của cây dựa trên ma trận của cây.

Chương 3. Phương pháp ma trận trong hình học. Trong chương này phép phân tích SVD được sử dụng để trả lời các câu hỏi: cho trước hai không gian con, chúng gần nhau như thế nào, chúng có giao nhau hay không, ta có thể "quay" một không gian con thành không gian còn lại không.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới TS. Nguyễn Thanh Sơn, người đã định hướng chọn đề tài và tận tình hướng dẫn, cho tôi những nhận xét quý báu để tôi có thể hoàn thành luận văn.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới các thầy cô, những người đã tận tâm giảng dạy và chỉ bảo tác giả trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết hơn chân thành tới phòng Sau Đại học, khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Cuối cùng tôi xin gửi làm cảm ơn tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2018

Người viết luận văn

Nguyễn Thị Thu Hương

Chương 1

Ma trận và một số kiến thức chuẩn bị

Nhằm đạt được tính toàn vẹn nhất định của luận văn và cũng là nhắc lại một số kiến thức cơ bản, chương này tổng hợp lại định nghĩa, một số tính chất, định lý cơ bản về ma trận, định thức, các phép toán trên ma trận, vết của ma trận, phân tích SVD của ma trận. Nội dung của chương được tổng hợp từ giáo trình đại số tuyến tính [1] và quyển sách chuyên khảo về tính toán ma trận [7].

1.1 Ma trận và các phép toán ma trận

Định nghĩa 1.1.1 ([1])**.** Mỗi bảng có dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{K}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$, được gọi là một *ma trận m hàng n cột* với các phần tử trong $\mathbb{K}$. Nếu $m = n$, thì ta nói A là một ma trận vuông cấp n. Véctơ hàng

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$$

được gọi là *hàng thứ i* của ma trận A. Véctơ cột

$$(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T$$

được gọi là *cột thứ j* của ma trận A.

Ma trận nói trên thường được ký hiệu gọn là $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Tập hợp tất cả các ma trận m hàng, n cột với các phần tử trong $\mathbb{K}$ được ký hiệu là $M(m\times n, \mathbb{K})$.

Ta định nghĩa hai phép toán cộng và nhân với vô hướng trên $M(m \times n, \mathbb{K})$ như sau:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix},$$

$$a \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_{11} & aa_{12} & \cdots & aa_{1n} \\ aa_{21} & aa_{22} & \cdots & aa_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ aa_{m1} & aa_{m2} & \cdots & aa_{mn} \end{bmatrix}, (a \in \mathbb{K}).$$

Cho hai ma trận $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K}), B = (b_{jk}) \in M(n \times p, \mathbb{K})$.

Định nghĩa 1.1.2 ([1])**.** Tích AB của ma trận A và ma trận B là ma trận $C = (c_{ik}) \in M(m \times p, \mathbb{K})$ với các phần tử được xác định như sau

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq p).$$

Ví dụ 1.1.3.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & t \\ y & u \\ z & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by+cz & at+bu+cv \\ dx+ey+fz & dt+eu+fv \\ gx+hy+iz & gt+hu+iv \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 1.1.4.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 7 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 3 & 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

Nhận xét 1.1.5. Điều kiện để định nghĩa được ma trận tích AB là số cột của A bằng số hàng của B. Có thể xảy ra trường hợp tích AB thì định nghĩa được mà tích BA thì không.

Ma trận

$$I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

được gọi là ma trận đơn vị cấp n.

Định nghĩa 1.1.6 ([1]). Ma trận $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ được gọi là một ma trận khả nghịch (hoặc ma trận không suy biến) nếu có ma trận $B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ sao cho $AB = BA = I_n$. Khi đó, ta nói B là nghịch đảo của A và ký hiệu $B = A^{-1}$.

Nhận xét rằng nếu A khả nghịch thì ma trận nghịch đảo của nó được xác định duy nhất. Thật vậy, giả sử B và B' đều là các nghịch đảo của A. Khi đó

$$B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_nB' = B'.$$

Trong Mục 1.2, chúng ta sẽ chỉ ra một điều kiện cần và đủ rất đơn giản để cho một ma trận vuông là khả nghịch.

Định nghĩa 1.1.7. Cho ma trận A cỡ $m \times n$, nếu ta đổi các hàng của ma trận A thành các cột (và do đó các cột thành các hàng) thì ta được ma trận mới cỡ $n \times m$, gọi là ma trận chuyển vị của ma trận trên A, ký hiệu A^T

$$A^T = (c_{ij})_{n\times m},\ c_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

Tính chất 1.1.8.

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
2. $(kA)^T = kA^T$.
3. $(AB)^T = B^TA^T$.

Định nghĩa 1.1.9.

1. Nếu $A = A^T$ thì A được gọi là ma trận đối xứng (A là ma trận vuông có các phần tử đối xứng nhau qua đường chéo thứ nhất).
2. $A = -A^T$ thì A được gọi là phản đối xứng (A là ma trận vuông có các phần tử đối xứng và trái dấu qua đường chéo thứ nhất, các phần tử trên đường chéo thứ nhất bằng 0).